2) $\boxed{\text{Para A1}}$

Polinom. caract. → $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

→ $P(\lambda) = \det(\lambda I - A_1) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$

A_1 es diagonalizable ⟷ ∃ base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovect. de A_1.

Busco autovalores y autovectores:

$\det(\lambda I - A_1) = 0 \to \underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0}_{\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \nearrow 3,\ \searrow 1} \to \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}}$ autovalores.

Para $\lambda = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{F2 \to F1+F2} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to x - y = 0 \to x = y$

$\to \bar{x} = (x, x) = x \cdot (1,1)$

$\boxed{\text{AUTOVECTOR } \lambda=3: (1,1)}$

Para $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{F2 \to F1-F2} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to -x - y = 0 \to x = -y \to y = -x$

$\to \bar{x} = (x, -x) = x \cdot (1;-1)$

$\boxed{\text{AUTOVECTOR } \lambda=1: (1;-1)}$

Como $\{(1,1), (1,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$ ya que los dos vectores no son múltiplos entre ellos → A_1 es diagonalizable.

La matriz diagonal será: $\boxed{\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

y la matriz inversible: $\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$

Para A_2

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

autovalores $\rightarrow$ $\underbrace{\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0}_{\frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2}}$ $\nearrow 2$, $\searrow 2$ $\rightarrow$ $\boxed{\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right\} \text{2 raíz doble. (multiplicidad algeb: 2)}}$

Para $\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{X} = x\cdot(1\,0) + y\cdot(0\,1)$

$\boxed{\rightarrow \text{AUTOVECT.} \lambda = 2 : \{(1,0),(0,1)\}}$ como forman base de $\mathbb{R}^2$ A_2 es diagonalizable

$\boxed{\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$ $\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

Para A_3

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A_3) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$

autoval. $\rightarrow$ $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}}$

Para $\lambda = 2$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow \bar{X} = (x, 0) = x\cdot(1,0)$

Como la multiplicidad geométrica (1) me quedó menor a la algebraica para $\lambda = 2$ (2) no es diagonalizable A_3.

Para A_4

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A_4) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

Autoval. $\rightarrow$ $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\left.\frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}\right\}$ raices complejos. Como A_4 es de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, los autovalores deben ser reales.